PILARES CUADRADOS DE HORMIGON ARMADO SOMETIDOS A FLEXION COMPUESTA

POR JAVIER LAHUERTA.

1.º INTRODUCCION

Una de las modalidades de cálculo que con más frecuencia se presentan al arquitecto en las estructuras de hormigón armado normales en la edificación, es el de la pieza cuadrada solicitada por un esfuerzo normal de compresión y dos momentos flectores, uno en cada uno de los ejes principales de la sección de la pieza.

En una estructura cruzadamente aporticada, como suelen ser las normales de edificación, todos los pilares, que ordinariamente se proyectan de sección cuadrada, están solicitados, en general, de este modo. En un cálculo concienzudo de las solicitaciones se determinan los momentos flectores en los dos ejes de cada pilar; y aun en el cálculo más abreviado, haciendo uso de las fórmulas aproximadas prescritas en las *Normas para el cálculo y ejecución de las obras de hormigón armado*, de la Dirección General de Arquitectura (párrafo 16, pág. 50), es necesario tener en cuenta tal solicitación, al menos en todos los pilares perimetrales.

El cálculo de los pilares con esta solicitación es perfectamente conocido, y existen tabulaciones para los coeficientes de las correspondientes fórmulas, tanto en el caso de que la sección de hormigón trabaja íntegra con momento flector en uno o en los dos ejes, como en el caso de no ser efectiva parte de la sección de hormigón, existiendo momento flector en uno de los ejes principales del pilar; y aun en el caso de existir momento flector en ambos ejes, sin ser efectiva la sección total, esta el cálculo bastante sistematizado, citando como últimas publicaciones interesantes del problema:

1. L. Hahn: *La Technique des Travaux*, mayo 1939.
2. W. G. S. Saville, New-York: *Civil Engineer*, marzo 1940.
3. B. Löser, Dresden: *Beton und Eisen*, núm. 1, 1940, y núm. 6, 1941.
4. J. Rüdinger, Copenhague: *Beton und Eisen*, número 24, 1940, y nums. 19-20, 1942; *I. T. du Batiment*, circulaire serie F, num. 17, 10 de octubre de 1943.
5. W. Säger, Berlin: *Der Bauingenieur*, numeros 21-23, 1941.
6. J. L. Muzquiz y A. Angulo, Madrid: *Revista de Obras Públicas*, julio-agosto-septiembre, 1942.

Sin embargo, todos los procedimientos y tabulaciones existentes tienen un caracter general y obligan, por tanto, a realizar operaciones numéricas, que, aun siendo sencillas, resultan laboriosas si el numero de pilares de la estructura que se calcula es elevado.

El autor, teniendo que enfrentarse con el cálculo de una estructura de gran envergadura, encontró ventajoso abordar el problema en general, construyendo la tabulación que sigue a continuación, que juzga de gran interes divulgar, puesto que suprime toda operación aritmética, una vez obtenidas las solicitaciones de la pieza. Estas tabulaciones se refieren al pilar cuadrado de armadura simétrica, que es el caso que constructivamente mas se aplica por las innegables ventajas de orden práctico que presenta. En él se ha estudiado también detenidamente el problema de la cuantía, desde el punto de vista económico y mecanico, incluyéndose en la tabulación los dos tipos que se han aceptado como más favorables, según los casos.

2.º NOTACIONES Y NORMAS

Para claridad y comodidad en el estudio de lo que sigue, juzgamos conveniente resumir en un cuadro las notaciones empleadas, que, por otra parte, son las ya casi internacionalmente normalizadas.

Dimensiones:

Lado del cuadrado................................	d
Recubrimiento de las armaduras............	$a = \alpha\, d$
Distancia vertical del lado superior a la linea neutra..	$x = \xi\, d$
Idem al centro de gravedad de la sección ideal total....................................	$g = \gamma\, d$
Idem a la armadura de tracción.........	$h = (1 - \alpha)\, d$

Términos de sección:

Area útil del hormigón..........................	F_b
Area de las armaduras..........................	F_e
Area ideal total.......................................	$F = F_b + n\, F_e$
Cuantía	$\varphi = \frac{F_e}{d^2}$
Momento de inercia horizontal.............	J_u
Momento de inercia vertical.................	J_v

Constantes mecánicas:

Coeficiente de equivalencia...................	$n = \frac{E_e}{E_b}$
Tensión normal (positiva en tracción)...	σ
Tensión normal máxima de compresión en el hormigón..	$\sigma_o = \sigma$
Tensión normal máxima de tracción (o mínima de compresión).........................	σ_u

Solicitación:

Esfuerzo normal......................................	N
Momento flector en general...................	M
Momento flector en el eje horizontal.....	M_u
Momento flector en el eje vertical	M_v

Las ya citadas normas permiten contar con la resistencia a tracción del hormigón, siempre que la tensión de éste sea

$$\sigma_u \leq -\frac{1}{4}\,\sigma_o\,; \qquad (1)$$

sobrepasando este valor se admite la hipótesis general de que sólo es efectiva la sección de hormigón situado por encima de la linea neutra, despreciando la resistencia a tracción de aquél.

A continuación estudiamos cada caso por separado.

3.º CASO I: SECCION DE HORMIGON TOTALMENTE EFECTIVA

Las solicitaciones que no rebasan la limitación (1) tienen en la práctica fundamental importancia, por comprender la mayoría de las que se producen en los pilares corrientes de las estructuras de edificación.

En este caso aplicamos la ecuación general de tensiones normales en flexión,

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M\ v}{J_u} + \frac{M_v\ u}{J_v}\,, \qquad (2)$$

en la cual los términos de sección valen

$$F = (1 + n\,\varphi)\, d^2 = \psi\, d^2$$

$$J_u = J_v = \frac{1 + 3n\varphi\,(1 - 2\,\alpha)^2}{12}\, d^4 = \eta\, d^4$$

Los valores límites de la tensión en el hormigón σ_o y σ_u, que corresponden, respectivamente, a los puntos $(u = \frac{d}{2},\ v = \frac{d}{2})$ y $(u = -\frac{d}{2}$ y $v = -\frac{d}{2})$, valen

$$\left.\begin{matrix}\sigma_o\\ \sigma_u\end{matrix}\right\} = \frac{N}{\psi\, d^2} \pm \frac{M}{2\,\eta\, d^3} \qquad (3)$$

siendo M el momento flector cuando existe un solo eje, y $M = M_u + M_v$ cuando existen en los dos ejes.

De esta fórmula se despeja N:

$$N = \psi\, \sigma_o\, d^2 - \frac{\psi}{2\,\eta}\,\frac{M}{d} \qquad (4)$$

Pilares cuadrados de hormigón armado solicitados por flexión compuesta.

Cuantías:	Parte izquierda: $\varphi = 0'008$	Centro . . . . $\varphi = 0'018$	Parte derecha: $\varphi = 0'018$
Tensiones:	(Hormigón total efectivo) $\sigma_b = 0'035\ t/cm^2$	(Hormigón total efectivo) $\sigma_b = 0'035\ t/cm^2$	(Hormigón no efectivo a tracción). $\sigma = 0'040\ t/cm^2$

d — 0'9 d

Lado d cm.	Esfuerzo normal N en t que resisten con un Momento flector M en t cm.																										Lado d cm.
	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	
20	15'7	13'1	10'5	7'90	8'58	3'73	2'06	0'73																			20
22	19'0	16'6	14'2	11'9	9'51	7'15	8'97	3'94	2'48	1'20	0'05																22
24	22'6	20'4	18'3	16'1	13'9	11'7	9'58	12'2	10'2	4'82	3'43	2'21	1'09	0'06													24
25	24'5	22'4	20'3	18'3	16'2	14'1	12'0	9'94	13'6	11'8	5'48	4'11	2'89	1'78	0'73												25
26	26'5	24'5	22'5	20'5	18'5	16'5	14'5	12'5	10'5	14'1	12'3	6'29	4'91	3'69	2'58	1'53	0'54										26
28	30'7	28'9	27'0	25'2	23'3	21'4	19'6	17'7	15'9	14'0	12'2	16'8	15'2	13'5	6'94	5'68	4'54	3'48	2'49	1'54	0'61						28
30	35'3	33'5	31'8	30'1	28'3	26'6	24'9	23'1	21'4	19'7	17'9	16'2	14'5	20'1	18'6	17'0	15'5	8'24	7'03	5'92	4'89	3'91	2'98	2'10	1'21	0'37	30
	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	
32	40'1	36'1	32'0	28'0	23'9	19'8	15'8	20'3	10'1	7'31	4'89	2'71	0'68														32
34	45'3	41'5	37'7	33'8	30'0	26'2	22'4	18'5	24'4	21'0	10'3	7'76	5'51	3'45	1'51												34
35	48'0	44'3	40'6	36'9	33'2	29'4	25'7	22'0	18'3	25'0	21'7	10'7	8'22	6'03	4'01	2'10	0'28										35
36	50'8	47'2	43'6	40'0	36'4	32'7	29'1	25'5	21'9	28'8	25'6	22'4	11'2	8'83	6'68	4'69	2'81	0'10									36
38	56'6	53'2	49'8	46'3	42'9	39'5	36'1	32'6	29'2	25'8	22'4	30'9	27'9	24'9	12'8	10'4	8'36	6'42	4'57	2'82	1'13						38
40	62'7	59'5	56'2	53'0	49'7	46'5	43'2	40'0	36'7	33'5	30'2	27'0	23'7	33'7	30'9	28'0	14'9	12'6	10'5	8'62	6'80	5'06	3'38	1'76	0'17		40
	0	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250	
42	69'1	63'0	56'8	50'6	44'4	39'2	32'0	39'9	34'4	17'7	13'3	9'50	6'02	2'90													42
44	75'9	70'0	64'1	58'2	52'2	46'3	40'4	34'5	28'6	38'8	33'5	16'6	12'7	9'24	6'04	3'03											44
45	79'4	73'6	67'8	62'0	56'3	50'5	44'7	38'9	33'1	44'1	39'0	33'9	16'4	12'7	9'38	6'25	3'30	0'47									45
46	82'9	77'3	71'6	66'0	60'3	54'7	49'0	43'4	37'7	32'1	44'0	39'0	20'5	16'4	12'9	9'65	6'60	3'71	0'93								46
48	90'3	84'9	79'5	74'1	68'6	63'2	57'8	52'4	47'0	41'6	36'1	49'7	44'9	40'1	20'8	17'1	13'7	10'6	7'69	4'89	2'20						48
50	98'0	92'8	87'6	82'4	77'2	72'0	66'8	61'6	56'4	51'2	46'0	40'8	55'9	51'3	46'7	42'1	21'9	18'4	15'2	12'2	9'30	6'57	3'94	1'39			50
	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500	
52	106	96'0	86'0	76'0	66'0	56'0	46'0	58'2	49'4	23'7	17'2	11'4	6'14	1'20													52
54	114	105	95'0	85'4	75'8	66'1	56'5	46'9	61'4	52'9	26'2	19'7	14'0	8'80	3'91												54
55	119	109	100	90'2	80'8	71'3	61'8	52'4	67'5	59'1	50'8	24'2	18'2	12'8	7'84	3'09											55
56	123	114	104	95'1	85'8	76'5	67'2	57'9	48'6	65'4	57'2	29'1	22'7	17'1	11'9	7'07	2'44										56
58	132	123	114	105	96'0	87'0	78'1	69'1	60'1	51'2	70'2	62'3	32'7	26'3	20'7	15'5	10'7	6'07	1'65								58
60	141	132	124	115	106	97'8	89'1	80'4	71'7	63'1	54'4	75'6	68'0	60'3	30'5	24'8	19'6	14'7	10'1	5'71	1'47						60
	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000	2200	2400	2600	2800	3000	3200	3400	3600	3800	4000	4200	4400	4600	4800	5000	
65	166	150	134	118	102	85'6	69'6	88'7	74'5	34'7	24'6	15'6	7'33														65
70	192	177	162	147	133	118	103	88'0	73'2	99'5	86'4	42'7	32'9	24'1	16'0	8'41	1'13										70
75	221	207	193	179	165	151	137	123	110	95'7	127	115	103	54'5	44'5	35'7	27'6	20'0	12'8	5'87							75
80	251	238	225	212	199	186	173	160	147	134	121	108	94'8	135	123	112	59'8	50'6	42'3	34'5	27'2	20'2	13'5	7'05	0'74		80
	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600	6000	6400	6800	7200	7600	8000	8400	8800	9200	9600	10000	
85	283	259	234	210	185	161	136	112	148	126	60'3	44'6	30'6	17'7	5'50												85
90	318	294	271	248	225	202	179	156	133	176	156	82'6	65'6	50'8	37'4	25'0	13'2	1'90									90
95	354	332	310	288	266	244	222	200	179	157	135	188	169	91'0	74'8	60'5	47'5	35'3	23'8	12'7	2'04						95
100	392	371	350	330	309	288	267	246	226	205	184	163	224	205	187	168	87'6	73'6	60'6	48'6	37'2	26'3	15'8	5'55			100

fórmula con la que se calcula la tabla en este caso I, como se detalla más adelante.

4.º CASO II: SECCION DE HORMIGON PARCIALMENTE EFECTIVA

Cuando la solicitación rebasa la limitación (1), deja de considerarse efectiva para el cálculo de la zona de tracción. La ecuación de tensiones normales es la misma (2), pero su empleo se complica extraordinariamente, porque F. J_u y J_v no son constantes, sino funciones de la posición de la línea neutra.

En el caso general de que existan dos componentes M_u y M_v del momento flector, la complejidad llega al límite, puesto que la posición de la línea neutra depende de dos parámetros y, además, los ejes principales de inercia de la sección ideal experimentan, respecto de los de la sección completa, un desplazamiento y un giro.

El caso más sencillo y frecuente de que sólo exista una de las componentes se estudia a continuación.

Las fórmulas, de sencilla deducción, expresando el equilibrio en función del parámetro que define la posición de la línea neutra, son:

Centro de gravedad:

$$g = \frac{\xi^2 + n\,\varphi}{2\,(\xi + n\,\varphi)}\,d = \gamma\,d$$

Tensiones en las armaduras:

$$\sigma'_e = \frac{\xi - \alpha}{\xi}\,n\,\sigma_b$$

$$\sigma_e = \frac{\xi - 1 + \alpha}{\xi}\,n\,\sigma_d$$

Se considera que la solicitación actúa en el centro de gravedad de la sección ideal, lo que representa una exactitud absoluta dentro de las hipótesis establecidas, aun cuando supone una complejidad en las fórmulas mayor que cuando se admite que actúa en el centro de la sección total, que es la hipótesis ordinaria.

Las fórmulas así obtenidas son:

$$N = \frac{\xi^2 + 2\,n\,\varphi\,\xi - n\,\varphi}{2\,\xi}\,\sigma_d\,d^2 = \nu\,\sigma_b\,d^2 \qquad (5)$$

$$M = \frac{\xi^4 + 4\,n\,\varphi\,\xi^3 - 6\,n\,\varphi\,\xi^2 + 6\,n\,\varphi\,(2\,\alpha^2 - 2\,\alpha + 1)\,\xi + 3\,n^2\,\varphi^2\,(4\,\alpha^2 - 4\,\alpha + 1)}{12\,\xi^2 + 12\,n\,\varphi\,\xi}\,\sigma_b\,d^3 = \mu\,\sigma_b\,d^3 \qquad (6)$$

con las que se calcula la tabla en este caso II.

5.º VALORES NUMERICOS ADOPTADOS EN LA TABULACION

a) *Cuantía:*

Se adopta el valor

$$\varphi = 0{,}008$$

mínimo que las *Normas* exigen, en general, para el armado de pilares solicitados por momento flector comprendido entre O y el M_1, correspondiente a la limitación (1) (parte primera de la tabla), es decir, con sección de hormigón totalmente efectiva.

Para valores de *M* que rebasen este límite la resistencia de un pilar tan débilmente armado es escasa, por lo que resulta antieconómico, siendo recomendable adoptar el valor

$$\varphi = 0{,}018$$

que es la cuantía de una pieza de armadura simétrica trabajando a las tensiones de

$$\sigma_o = 0{,}040\ t/cm^2 \text{ y } \sigma_e = 1{,}200\ t/cm^2$$

Esta cuantía se emplea así para el armado de pilares solicitados por momento flector comprendido entre el M_1 anterior y el M_2 correspondiente a la limitación (1) en este caso (parte segunda de la tabla), y desde el M_2 al M_3, máximo absoluto, correspondiente al caso de flexión simple (parte tercera de la tabla).

b) *Recubrimiento:*

En todo caso se adopta en la tabulación el valor

$$\alpha = 0{,}05$$

que siempre da valores aceptables para el recubrimiento de las armaduras.

c) *Tensiones admisibles:*

Para el hormigón se adopta en el caso I el valor

$$\sigma_o = \sigma_{b\ adm} = 0{,}035\ t/cm^2$$

que prescriben las *Normas*, párrafo 9, pág. 27) para compresión simple en pilares de hormigón ordinario de cemento portland con $\sigma_{RC28} = 0{,}120\ t/cm^2$

En el caso II se adopta

$$\sigma_o = \sigma_{b\ adm} \geq 0{,}040\ t/cm^2$$

valor que las citadas *Normas* prescriben para flexión en el mismo caso.

Para el hierro, en todo caso, el valor máximo admisible es

$$\sigma_{e\ adm} = 1{,}200\ t/cm^2$$

6.º CONSTRUCCION DE LA TABLA

a) *Parte primera (izquierda):*

Para cada uno de los valores *d* se calcula con (4) el valor *N*, que corresponde a los valores progresivos de *M* hasta el máximo M_1 citado.

Los coeficientes numéricos de la fórmula (4) valen

$$\psi = 1{,}12 \qquad \eta = 0{,}107633$$

b) *Parte segunda (centro):*

Se emplea la misma fórmula (4), cuyos coeficientes numéricos valen ahora

$$\psi = 1{,}27 \qquad \eta = 0{,}1380833$$

c) *Parte tercera (derecha):*

Aquí se ha comenzado tabulando los coeficientes ν y μ de las fórmulas (5) y (6) para valores de ξ comprendidos entre el máximo $\xi = 0{,}800$, que corresponde a la limitación (1) y el mínimo $\xi = 0.317$, que corresponde a la solicitación de flexión simple.

Para cada uno de los valores *d* se calcula con (6) el coeficiente μ, que corresponde a los valores progresivos de *M* desde los citados M_2 a M_3; por interpolación se determina el valor ν correspondiente al μ calculado, y con (5) se calcula *N*.

7.º MODO DE EMPLEO DE LA TABLA

Conocidas las tres componentes de la solicitación *N*, M_u y M_v, se forma la suma $M = M_u + M_v$; con M se entra en la fila horizontal del momento flector y se desciende por la correspondiente columna hasta obtener el valor de *N;* en los extremos de esta fila tenemos el valor *d* necesario.

Si el valor de *N* lo obtenemos a la izquierda de la primera quebrada, el pilar será armado con $\varphi = 0{,}008$. Si el valor de *N* lo obtenemos entre la primera y segunda quebrada, el pilar será armado con $\varphi = 0{,}018$. Si el valor de *N* lo obtenemos a la derecha de la segunda quebrada, el cálculo es válido sólo cuando existe una componente *M*, no en el caso de flexión disimétrica, y el pilar será armado también con $\varphi = 0{,}018$. Aumentando prudencialmente la sección o el armado, puede también emplearse en primera aproximación la sección aquí dada en esta parte derecha para este caso de flexión disimétrica.

Si calculamos con tensiones admisibles, diferentes de las empleadas en la tabla, basta entrar en la tabla con valores *Mk* y *Nk*, siendo

$$k = \frac{0{,}035}{\sigma_{Cadm}} \text{ y } k = \frac{0{,}040}{\sigma_{Fadm}}$$

en las partes 1.ª y 2.ª y en la parte 3.ª, respectivamente, puesto que en las fórmulas (3), (4), (5) y (6) se ve claramente que *M* y *N* varían linealmente con σ_{adm}.

Hay que tener en cuenta que en la parte 3.ª, la tensión en la armadura es $\sigma_e = \frac{1{,}200}{k}$ y que, por tanto, puede sobrepasar la admisible en los valores extremos de la tabla.

En el caso de pilares con esbeltez práctica $\frac{h}{d} > 15$ siguiendo el procedimiento generalizado, entraremos en la tabla con el valor $N\omega$, siendo ω el coeficiente de pandeo correspondiente a la esbeltez.